



# ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ

## Τμήμα Πληροφορικής

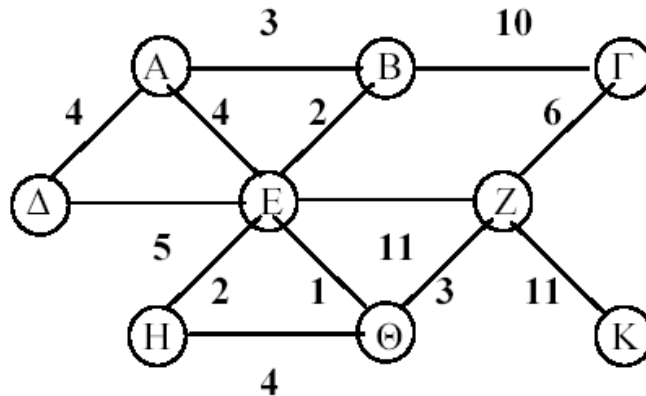
ΕΠΛ 035- ΔΟΜΕΣ ΔΕΔΟΜΕΝΩΝ ΚΑΙ ΑΛΓΟΡΙΘΜΟΙ ΓΙΑ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΟΥΣ  
ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ

### Φροντιστηριακές Ασκήσεις - Γράφοι

Διδάσκων: Δημήτρης Ζεϊναλιπούρ

#### Άσκηση 1

Να χρησιμοποιήσετε τον αλγόριθμο του Prim για να βρείτε ένα ελάχιστο γεννητορικό δένδρο του πιο κάτω γράφου ξεκινώντας από τη κορυφή A. Να δείξετε, όπως στις διαλέξεις, όλα τα ενδιαμέσως στάδια εκτέλεσης. Αναφέρατε επίσης το βάρος του ελάχιστου γεννητορικού δένδρου που βρήκατε.

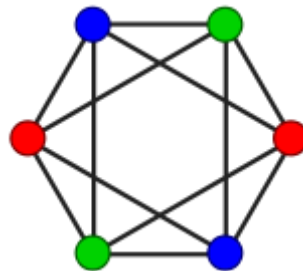


#### Άσκηση 2

Σας δίδεται ένας κατευθυνόμενος γράφος  $G=(V,E)$  υπό την μορφή πίνακα γειτνίασης  $G[|V|][|V|]$ . Αντίστροφος ενός κατευθυνόμενου γράφου  $G=(V,E)$  ονομάζεται ο γράφος  $G^T=(V, E^T)$ , όπου μια ακμή  $(v,w) \in E^T$  αν και μόνο αν  $(w,v) \in E$ . Δηλαδή ο γράφος  $G^T$  έχει τις ίδιες κορυφές με τον  $G$  με την διαφορά ότι όλες του οι ακμές έχουν αντίστροφη κατεύθυνση. Να γράψετε ένα αποδοτικό αλγόριθμο ο οποίος να μετατρέπει τον  $G$  σε  $G^T$ . Ποιος είναι ο χρόνος εκτέλεσης του αλγόριθμου σας;

#### Άσκηση 3

Ένας γράφος ονομάζεται  $k$ -χρωματισμός αν είναι δυνατό να χρωματίσουμε τους κόμβους του με  $k$  διαφορετικά χρώματα έτσι ώστε κανένα ζεύγος από γειτονικούς κόμβους να μην έχει το ίδιο χρώμα. Να προτείνετε αλγόριθμο ο οποίος με δεδομένο κάποιο γράφο  $G=(V,E)$  αποφασίζει κατά πόσο ο αλγόριθμος είναι 2-χρωματίσιμος σε χρόνο  $O(|V|+|E|)$ .



Ο πιο πάνω γράφος είναι 3-χρωματίσιμος. Λιγότερα χρώματα θα έκαναν γειτονικές κορυφές να έχουν το ίδιο χρώμα.

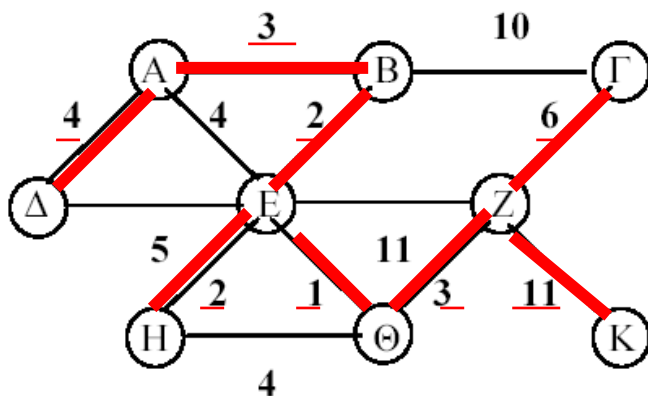
# Φροντιστηριακές Ασκήσεις

## Γράφοι - ΛΥΣΕΙΣ

### Λύση Άσκηση 1

(Τα στάδια εκτέλεσης ζητούνται όπως αυτά δόθηκαν στην διάλεξη.  
 Εάν ξεκινήσουμε από το Α τότε η επιλογή των ακμών θα γίνει με την ακόλουθη σειρά: Α, Β, Ε, Θ, Η, Ζ, Δ, Γ, Κ ( Συνολικό Βάρος ΕΓΔ = 32 )  
**Συγκεκριμένα:**

- |              |   |    |                                   |
|--------------|---|----|-----------------------------------|
| 1) Επιλογή Α | Α | => | <b><u>B:3</u></b> , E:4, Δ:4      |
| 2) Επιλογή Β | Α | => | E:4, Δ:4                          |
|              | Β | => | <b><u>E:2</u></b> , Γ:10          |
| 3) Επιλογή Ε | Α | => | Δ:4                               |
|              | Β | => | Γ:10                              |
|              | Ε | => | Δ:5, Ζ:11, Η:2, <b><u>Θ:1</u></b> |
| 4) Επιλογή Θ | Α | => | Δ:4                               |
|              | Β | => | Γ:10                              |
|              | Ε | => | Δ:5, Ζ:11, <b><u>H:2</u></b>      |
|              | Θ | => | H:4,Z:3                           |
| 5) Επιλογή Η | Α | => | Δ:4                               |
|              | Β | => | Γ:10                              |
|              | Ε | => | Δ:5, Ζ:11                         |
|              | Θ | => | <b><u>Z:3</u></b>                 |
| 6) Επιλογή Ζ | Α | => | <b><u>Δ:4</u></b>                 |
|              | Β | => | Γ:10                              |
|              | Ε | => | Δ:5                               |
|              | Ζ | => | Γ:6, Κ:11                         |
| 6) Επιλογή Δ | Β | => | Γ:10                              |
|              | Ζ | => | <b><u>Γ:6</u></b> , Κ:11          |
| 6) Επιλογή Γ | Ζ | => | Κ:11                              |
| 6) Επιλογή Κ |   |    |                                   |



Συνολικό Βάρος  
ΕΓΔ = 32

## Λύση Άσκησης 2

```
for (i=0; i<|V|; i++) {
    for (j=i; j<|V|; j++) {
        temp = A[i][j];
        A[i][j] = A[j][i];
        A[j][i] = temp
    }
}
```

Το οποίο είναι τάξης  $O(|V|^2)$ , όπου  $|V|$  είναι ο αριθμός των κορυφών του γράφου.

## Λύση Άσκησης 3

Μας δίνεται ένας γράφος  $G$  και θέλουμε να αποφασίσουμε κατά πόσο είναι 2-χρωματίσιμος. Για να το πετύχουμε, επιχειρούμε χρωματισμό του γράφου ως εξής: Ξεκινούμε με κάποιο τυχαίο κόμβο και τον χρωματίζουμε με το χρώμα 1. Στη συνέχεια παίρνουμε όλους τους γείτονες του και τους χρωματίζουμε με το χρώμα 2. Συνεχίζουμε με τους γείτονες αυτών και τους χρωματίζουμε με το χρώμα 1, και ούτω καθεξής. Αν συναντήσουμε κάποιο κόμβο ο οποίος είναι ήδη χρωματισμένος υπάρχουν δύο περιπτώσεις: αν είναι χρωματισμένος με το χρώμα που θα θέλαμε να τον χρωματίσουμε, τότε προχωρούμε κανονικά, αν όμως είναι χρωματισμένος με το άλλο χρώμα, συμπεραίνουμε ότι ο γράφος μας δεν είναι 2-χρωματίσιμος και τερματίζουμε την εκτέλεση της διαδικασίας.

Η διαδικασία αυτή είναι επέκταση της διαδικασίας κατά-πλάτος διερεύνησης σε γράφους:

```
2-colorable(graph G, vertex v){
```

```
    Q=MakeEmptyQueue();
    for each w in G
        color[w] = 0;
    color[v] = 1;
    Enqueue(v, Q);

    while (!IsEmpty(Q)){
        w = Dequeue(Q);
        for each u adjacent to w
            if (color[u] != 0) // Γείτονας u έχει χρώμα
                if (color[w] == color[u]) // Εάν έχει το ίδιο χρώμα τότε break
                    report THE GRAPH IS NOT 2-COLORABLE
            else // Γείτονας u δεν έχει χρώμα
                if (color[w] == 1) color[u] = 2; // Δίνουμε το αντίθετο
                else color[u] = 1; // χρώμα στον γείτονα.
                Enqueue(u, Q); // Στην συνέχεια κάνουμε enqueue τον γείτονα για
                // συνέχεια του BFS traversal.
    }
```

Αρχικοποιούμε όλες τις κορυφές σε κανένα χρώμα. Μετά δίδουμε το χρώμα 1 στην πρώτη κορυφή. Επίσης προσθέτουμε την πρώτη κορυφή σε ουρά για BFS διάσχιση.