Σειρά Προβλημάτων 1 – Λύσεις

<u>Άσκηση 1 [18 μονάδες]</u>

Να αποφασίσετε κατά πόσο αληθεύουν οι πιο κάτω προτάσεις που αφορούν τις κανονικές πράξεις της ένωσης, της συναρμογής και της σώρευσης. Σε περίπτωση που μια πρόταση αληθεύει να την αποδείξετε, διαφορετικά να δώσετε κάποιο αντιπαράδειγμα.

(α) $(\Lambda \cup M)^* = (\Lambda^* M^*)^*$

(β) $\Lambda^* = \Lambda^*\Lambda^*$

(γ) $\Lambda \cup M\Lambda = (\Lambda \cup M)\Lambda$

<u>Λύση</u>

(α) Αρχικά, θα δείξουμε ότι για οποιοδήποτε στοιχείο $x \in (\Lambda \cup M)^*$ ισχύει ότι $x \in (\Lambda^*M^*)^*$.

Έστω στοιχείο x.

Αν $x \in (\Lambda \cup M)^*$ τότε $x = w_1 \ldots w_k$ όπου $k \geq 0$ και $w_i \in (\Lambda \cup M)$ για κάθε i

Επομένως $x = w_1 \ldots w_k$ όπου $k \geq 0$ και για κάθε i, $w_i \in \Lambda$ ή $w_i \in M$

Παρατηρούμε ότι αν $a \in A$ τότε $a \in A^*B^*$ και $a \in B^*A^*$, για οποιοδήποτε σύνολο Β. Αυτό προκύπτει αφού,

- $a \in A^*$, και $\varepsilon \in B^*$ για οποιοδήποτε Β, από τον ορισμό της πράξης της σώρευσης, και
- $a = a\varepsilon = \varepsilon a$

Αυτό συνεπάγεται ότι

$$x = w_1 \ldots w_k \text{ όπου } k \geq 0 \text{ και για κάθε } i,\ w_i \in \Lambda^*M^*$$

Συνεπώς, αν $x \in (\Lambda \cup M)^*$ τότε $x \in (\Lambda^*M^*)^*$

Για να δείξουμε την αντίθετη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι $x \in (\Lambda^*M^*)^*$ και θα δείξουμε ότι $x \in (\Lambda \cup M)^*$.

Έστω στοιχείο x.

Αν $x \in (\Lambda^*M^*)^*$ τότε $x=w_1 \ldots w_k$ όπου $k \geq 0$ και $w_i \in \Lambda^*M^*$ για κάθε i

τότε $x=w_1 \ldots w_k$ όπου $k \geq 0$ και για κάθε i, $w_i=u_iv_i$, όπου $u_i \in \Lambda^*$, $v_i \in M^*$

τότε $x=x_1 \ldots x_n$ όπου $n \geq 0$ και για κάθε i, $x \in \Lambda$ ή $x \in M$

Συνεπώς, αν $x \in (\Lambda^*M^*)^*$ τότε $x \in (\Lambda \cup M)^*$.

(β) θα δείξουμε ότι για οποιοδήποτε στοιχείο $x \in \Lambda^*$ ισχύει ότι $x \in \Lambda^*\Lambda^*$ και αντίστροφα.

Έστω στοιχείο x.

Τότε $x \in \Lambda^*$ αν και μόνο αν $x=w_1 \ldots w_k$ όπου $k \geq 0$ και $w_i \in \Lambda$ για κάθε i

αν και μόνο αν $x=uv$, όπου $u = w_1 \ldots w_m$, $v = w_{m+1} \ldots w_k$ όπου $k \geq 0$ και $w_i \in \Lambda$ για κάθε i

αν και μόνο αν $x=uv$, όπου $u \in \Lambda^*$, $v \in \Lambda^*$

αν και μόνο αν $x \in \Lambda^*\Lambda^*$

(γ) Η ισότητα $\Lambda \cup M\Lambda = (\Lambda \cup M)\Lambda$ δεν είναι αληθής. Ως αντιπαράδειγμα, μπορούμε να θεωρήσουμε το πιο κάτω.

$\Lambda = \{a\}$, $M = \{b\}$. Τότε $\Lambda \cup M\Lambda = \{a, ba\}$, $(\Lambda \cup M)\Lambda = \{aa, ab\}$, και προφανώς $\Lambda \cup M\Lambda \neq (\Lambda \cup M)\Lambda$.

Άσκηση 2 [20 μονάδες]

Υποθέστε ότι το σύνολο L είναι μια γλώσσα επί του αλφαβήτου {0, 1} τα στοιχεία της οποίας είναι ακριβώς οι λέξεις που παράγονται από τους πιο κάτω κανόνες:

(1) 1 ∈ L, 0 ∈ L
(2) Αν u ∈ L τότε 1*u*1 ∈ L
(3) Αν u ∈ L τότε 1*u*0 ∈ L
(4) Αν u ∈ L τότε 0*u*1 ∈ L
(5) Αν u ∈ L τότε 0*u*0 ∈ L

(α) Να αποδείξετε ότι κάθε λέξη w ∈ L έχει περιττό μήκος.

(β) Να αποδείξετε ότι αν η w είναι λέξη περιττού μήκους επί του αλφάβητου {0,1}, τότε w∈L.

Λύση

(α) Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή στον αριθμό των κανόνων που χρησιμοποιήθηκαν για την κατασκευή της w.

Βάση της Επαγωγής: Αν χρησιμοποιήθηκε μόνο ένας κανόνας, τότε αυτός πρέπει να είναι ο κανόνας 1 και η λέξη μια από τις *w* = 0 ή *w* = 1. Αφού οι λέξεις αυτές έχουν περιττό μήκος το ζητούμενο έπεται.

Επαγωγική Υπόθεση: Ας υποθέσουμε ότι για κάθε w∈L που παράγεται από λιγότερους από k >1 κανόνες, ισχύει ότι η w έχει περιττό μήκος.

Επαγωγικό Βήμα: Θεωρούμε μια λέξη w∈L η οποία παράγεται με τη χρήση k > 1 κανόνων. Πρέπει να δείξουμε ότι η w έχει περιττό μήκος. Παρατηρούμε ότι αφού k > 1, πρέπει κατά τη δημιουργία της λέξης, τελευταίος να χρησιμοποιήθηκε ένας από τους κανόνες 2-5. Ξεχωρίζουμε τις τέσσερις περιπτώσεις:

- Αν η w παράχθηκε με χρήση ως τελευταίου κανόνα τον κανόνα 2, τότε έχει τη μορφή 1*u*1 όπου u ∈ L. Από την υπόθεση της επαγωγής, και αφού η u παράγεται με λιγότερους από k κανόνες, η u έχει περιττό μήκος, έστω n=2m+1. Επομένως η w έχει μήκος n+2=2m+3=2(m+1)+1 που επίσης είναι περιττό. Το ζητούμενο έπεται.
- Αν η w παράχθηκε με χρήση ως τελευταίου κανόνα τον κανόνα 3, τότε έχει τη μορφή 1*u*0 όπου u ∈ L. Από την υπόθεση της επαγωγής, και αφού η u παράγεται με λιγότερους από k κανόνες, η u έχει περιττό μήκος, έστω n=2m+1. Επομένως η w έχει μήκος n+2=2m+3=2(m+1)+1 που επίσης είναι περιττό. Το ζητούμενο έπεται.
- Αν η w παράχθηκε με χρήση ως τελευταίου κανόνα τον κανόνα 4, τότε έχει τη μορφή 0*u*1 όπου u ∈ L. Από την υπόθεση της επαγωγής, και αφού η u παράγεται με λιγότερους από k κανόνες, η u έχει περιττό μήκος, έστω n=2m+1. Επομένως η w έχει μήκος n+2=2m+3=2(m+1)+1 που επίσης είναι περιττό. Το ζητούμενο έπεται.
- Αν η w παράχθηκε με χρήση ως τελευταίου κανόνα τον κανόνα 5, τότε έχει τη μορφή 0*u*0 όπου u ∈ L. Από την υπόθεση της επαγωγής, και αφού η u παράγεται με λιγότερους από k κανόνες, η u έχει περιττό μήκος, έστω n=2m+1. Επομένως η w έχει μήκος n+2=2m+3=2(m+1)+1 που επίσης είναι περιττό. Το ζητούμενο έπεται.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

(β) Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο μήκος της λέξης w.

Βάση της Επαγωγής: Αν |w| = 1, τότε απαραίτητα *w* = 0 ή w = 1. Αφού οι λέξεις αυτές παράγονται από τον κανόνα (1) τότε ανήκουν στο σύνολο L και το ζητούμενο έπεται.

<u>Επαγωγική Υπόθεση</u>: Ας υποθέσουμε ότι για κάθε λέξη w όπου $|w| < k$, και k περιττό, ισχύει ότι $w \in L$.

<u>Επαγωγικό Βήμα:</u> Θεωρούμε λέξη w όπου $|w| = k > 1$ και k περιττό. Πρέπει να δείξουμε ότι $w \in L$.

Αφού η w έχει περιττό μήκος, μπορεί να γραφτεί ως μια από τις λέξεις

1u1, 1u0, 0u1, 0u0

όπου u μια λέξη περιττού μήκους.

Αφού η u έχει περιττό μήκος μικρότερο από k, από την υπόθεση της επαγωγής, $u \in L$. Επομένως, με τη χρήση των κανόνων 2, 3, 4 και 5, παρατηρούμε ότι και οι λέξεις 1u1, 1u0, 0u1, $0u0 \in L$. Καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η $w \in L$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

<u>Άσκηση 3 [16 μονάδες]</u>

Για κάθε ένα από τα πιο κάτω πεπερασμένα αυτόματα να παρουσιάσετε το αυτόματο γραφικά μέσω του σχετικού συστήματος μεταβάσεων και να υπολογίσετε τη γλώσσα που αναγνωρίζει.

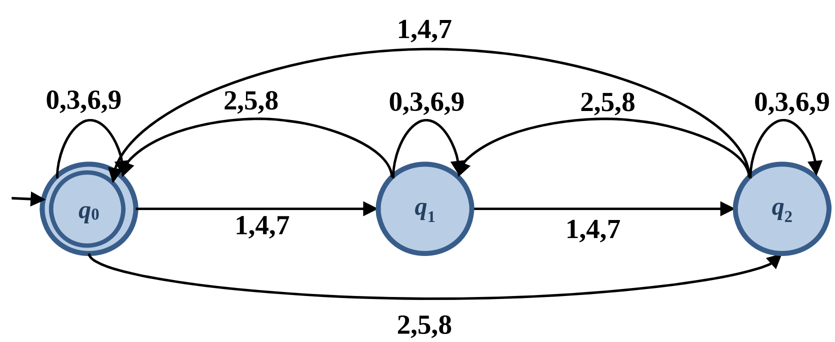
(α) Αυτόματο $A_1 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, όπου

- $Q = \{ q_0, q_1, q_2 \}$
- $\Sigma = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$
- $F = \{q_0\}$
- **δ όπως ορίζεται στον πίνακα που ακολουθεί:**

δ	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q_0	q_0	q_1	q_2	q_0	q_1	q_2	q_0	q_1	q_2	q_0
q_1	q_1	q_2	q_0	q_1	q_2	q_0	q_1	q_2	q_0	q_1
q_2	q_2	q_0	q_1	q_2	q_0	q_1	q_2	q_0	q_1	q_2

<u>Λύση</u>

Το σύστημα μεταβάσεων του αυτόματου φαίνεται πιο κάτω.



Παρατηρούμε ότι το αυτόματο αποδέχεται όλες τις λέξεις που αντιστοιχούν σε ακέραιους πολλαπλάσια του 3.

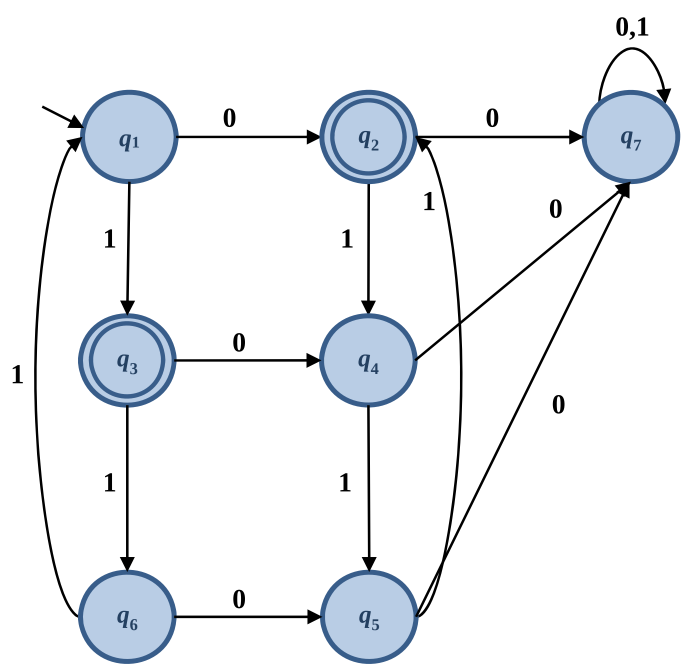
(β) Αυτόματο $A_2 = (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$, όπου

- **$Q = \{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$**
- **Σ = { 0,1 }**
- **$F = \{ q_2, q_3 \}$**
- **δ όπως ορίζεται στον πίνακα που ακολουθεί:**

δ	0	1
q_1	q_2	q_3
q_2	q_7	q_4
q_3	q_4	q_6
q_4	q_7	q_5
q_5	q_7	q_2
q_6	q_5	q_1
q_7	q_7	q_7

<u>Λύση</u>

Το σύστημα μεταβάσεων του αυτόματου φαίνεται πιο κάτω.



Η γλώσσα του αυτόματου είναι η: Λ = $\{ 1^{3n+1} \mid n \geq 0 \} \cup \{ 1^k01^m \mid k+m = 3n, n \geq 0\}$

<u>Άσκηση 4 [32 μονάδες]</u>

Για κάθε μια από τις πιο κάτω γλώσσες να κατασκευάσετε ντετερμινιστικό πεπερασμένο αυτόματο που να την αναγνωρίζει. Σε κάθε περίπτωση να δείχνετε: (1) τον τυπικό ορισμό του αυτομάτου και (2) το διάγραμμα καταστάσεων.

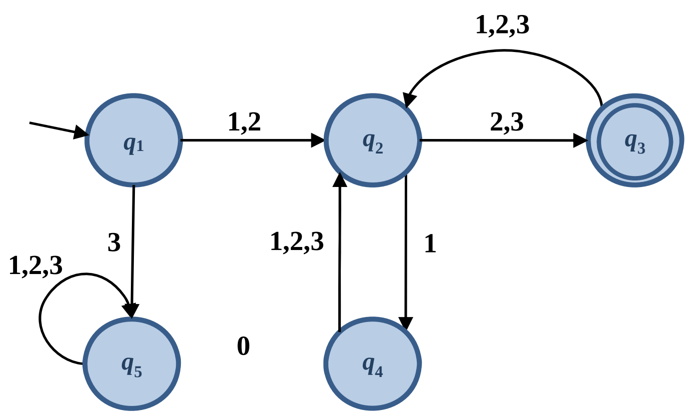
(α) {w |η w είναι μια λέξη επί του αλφάβητου {1,2,3} η οποία ξεκινά με 1 ή 2, τελειώνει σε 2 ή 3, και ενδιάμεσα περιέχει άρτιο αριθμό συμβόλων}

<u>Λύση</u>

Το ζητούμενο αυτόματο είναι το M = ($\{q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$, {1,2,3}, δ, q_1, $\{q_3\}$) όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	1	2	3
q_1	q_2	q_2	q_5
q_2	q_4	q_3	q_3
q_3	q_2	q_2	q_2
q_4	q_2	q_2	q_2
q_5	q_5	q_5	q_5

Σχεδιάγραμμα καταστάσεων:



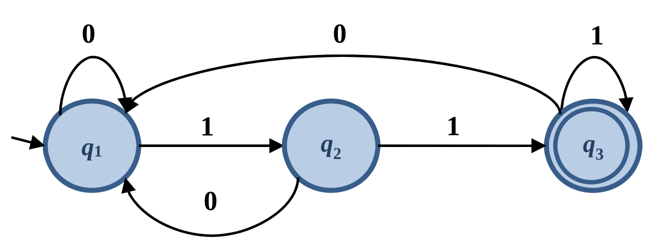
(β) { w | η w είναι μια λέξη επί του αλφάβητου {0,1} η οποία αναπαριστά ένα ακέραιο σε δυαδική μορφή ο οποίος όταν διαιρεθεί με το 4 αφήνει υπόλοιπο 3 }

<u>Λύση</u>

Παρατηρούμε ότι οι ακέραιοι σε δυαδική μορφή που αφήνουν υπόλοιπο 3 όταν διαιρεθούν με το 4 τελειώνουν στη συμβολοσειρά 11. Επομένως το ζητούμενο αυτόματο είναι το M = ({q_1, q_2, q_3}, {0,1}, δ, q_1, {q_3}) όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	0	1
q_1	q_1	q_2
q_2	q_1	q_3
q_3	q_1	q_3

Σχεδιάγραμμα καταστάσεων:



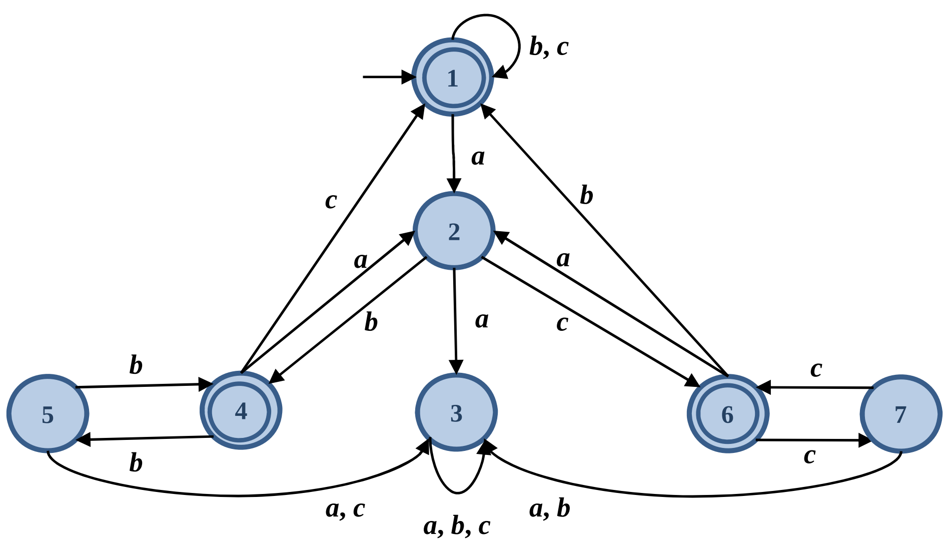
(γ) {w| η w είναι μια λέξη επί του αλφάβητου {a,b,c} όπου κάθε a ακολουθείται είτε από ένα περιττό αριθμό από b είτε από ένα περιττό αριθμό από c}

Λύση

Το ζητούμενο αυτόματο είναι το M = ({1,2,3,4,5,6,7}, {*a*,*b*,*c*}, δ, 1, {1,4,6}) όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	*a*	*b*	*c*
1	2	1	1
2	3	4	6
3	3	3	3
4	3	5	3
5	3	4	3
6	2	1	7
7	3	3	6

Σχεδιάγραμμα καταστάσεων:



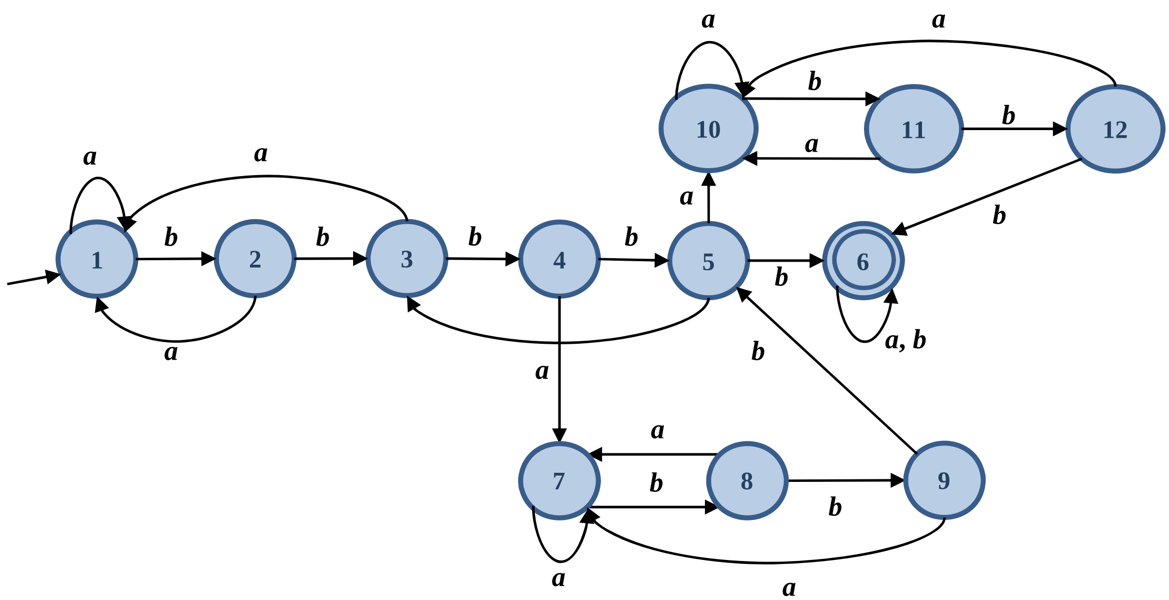
(δ) {w| η w είναι λέξη επί του αλφάβητου {a,b} η οποία περιέχει τη συμβολοσειρά bbb τουλάχιστον τρεις φορές}

Λύση

Το ζητούμενο αυτόματο είναι το M = ({1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12}, {*a*,*b*}, δ, 1, {6}) όπου η σχέση μεταβάσεων δ δίνεται στον πιο κάτω πίνακα.

δ	*a*	*b*
1	1	2
2	1	3
3	1	4
4	7	5
5	10	6
6	6	6
7	7	8
8	7	9
9	7	5
10	10	11
11	10	12
12	10	6

Σχεδιάγραμμα καταστάσεων:



<u>Άσκηση 5</u>

Θεωρήστε μια κανονική γλώσσα L επί του αλφάβητου {a,b,c}. Να αποδείξετε ότι η γλώσσα

$$L - (\{ab,ac\}^* \cup \{b^m c^n \mid m,n > 0\})$$

είναι επίσης μια κανονική γλώσσα.

<u>Λύση</u>

Καταρχάς, παρατηρούμε ότι η γλώσσα $\{ab,ac\}^* \cup \{b^m c^n \mid m,n > 0\}$ είναι κανονική. Αυτό μπορούμε να το επιβεβαιώσουμε παρατηρώντας ότι η γλώσσα μπορεί να τύχει περιγραφής ως κανονική έκφραση, την $(ab \cup ac)^* \cup b^+c^+$. Εναλλακτικά, μπορούμε να το δείξουμε παρουσιάζοντας αυτόματα (DFA ή NFA) για τη γλώσσα ή/και αξιοποιώντας την κλειστότητα των κανονικών γλωσσών ως προς τις κανονικές πράξεις της ένωσης, της συναρμογής και της σώρευσης.

Γνωρίζοντας ότι οι γλώσσες

- L, και
- $\{ab,ac\}^* \cup \{b^m c^n \mid m,n > 0\}$

είναι κανονικές, θα δείξουμε ότι και η διαφορά τους είναι κανονική ως εξής:

Αφού οι δύο γλώσσες είναι κανονικές, υπάρχουν DFA που τις αναγνωρίζουν. Θα κατασκευάσουμε αυτόματο για τη γλώσσα $L - (\{ab,ac\}^* \cup \{b^m c^n \mid m,n > 0\})$.

Η βασική ιδέα της κατασκευής είναι ότι, για να παρακολουθεί το καινούριο αυτόματο την εξέλιξη των δύο επιμέρους αυτομάτων, οι καταστάσεις του θα αποτελούν δυάδες κάθε στοιχείο των οποίων θα αντιστοιχεί στην κατάσταση στην οποία θα βρισκόταν το κάθε ένα από τα δύο αυτόματα τη συγκεκριμένη στιγμή της εκτέλεσης. **Το καινούριο αυτόματο θα αποδέχεται όταν βρίσκεται σε καταστάσεις όπου το πρώτο αυτόματο βρίσκεται σε τελική κατάσταση και το δεύτερο αυτόματο βρίσκεται σε μη τελική κατάσταση.**

Επομένως, θα αποδέχεται όταν το πρώτο αυτόματο αποδέχεται την είσοδο και το δεύτερο την απορρίπτει.

Ας υποθέσουμε ότι τα αυτόματα $M_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ και $M_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ αναγνωρίζουν τις γλώσσες L και $(\{ab,ac\}^* \cup \{b^m c^n \mid m,n > 0\})$, αντίστοιχα. Κατασκευάζουμε το $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ως εξής:

- $Q = \{(r_1, r_2) \mid r_1 \in Q_1, r_2 \in Q_2\}$
- Σ: το αλφάβητο είναι το ίδιο με αυτό των M_1 και M_2.
- Για κάθε $(r_1, r_2) \in Q$ και $a \in \Sigma$, θέτουμε
  $\delta((r_1, r_2), a) = (\delta_1(r_1, a), \delta_2(r_2, a))$
- $q_0 = (q_1, q_2)$
- $F = \{(r_1, r_2) \in Q \mid r_1 \in F_1,\ r_2 \notin F_2\}$

Απομένει να επιβεβαιώσουμε ότι για οποιαδήποτε λέξη w επί του αλφάβητου Σ

$$w \in L(M) \text{ αν και μόνο αν } w \in L - (\{ab,ac\}^* \cup \{b^m c^n \mid m,n > 0\}).$$

Ας υποθέσουμε ότι $w = w_1 w_2 \dots w_n \in L(M)$. Τότε, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $r_0, r_1, \dots, r_n$ του Q που ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $r_0 = q_0$
2. $\delta(r_i, w_{i+1}) = r_{i+1}$, για $i = 0,\dots,n-1$, και
3. $r_n \in F$

Επομένως, υπάρχει ακολουθία δυάδων-καταστάσεων $(p_0, s_0), (p_1, s_1), \dots, (p_n, s_n)$ του Q όπου για κάθε i, $p_i \in Q_1$, $s_i \in Q_2$, και όπου η ακολουθία αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες:

1. $(p_0, s_0) = (q_1, q_2)$
2. $\delta_1(p_i, w_{i+1}) = p_{i+1}, \delta_2(s_i, w_{i+1}) = s_{i+1}$, για $i = 0,\dots,n-1$, και
3. $p_n \in F_1$, $s_n \notin F_2$.

Κατά συνέπεια, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $p_0, p_1, \dots, p_n$, του Q_1 που ικανοποιεί τις συνθήκες

1. $p_0 = q_1$
2. $\delta_1(p_i, w_{i+1}) = p_{i+1}$, για $i = 0,\dots,n-1$, και
3. $p_n \in F_1$

Παρόμοια, υπάρχει ακολουθία καταστάσεων $s_0, s_1, \dots, s_n$, του Q_2 που ικανοποιεί τις συνθήκες

1. $s_0 = q_2$
2. $\delta_2(s_i, w_{i+1}) = s_{i+1}$, για $i = 0,\dots,n-1$, και
3. $s_n \notin F_2$

Αυτό συνεπάγεται ότι $w \in L(M_1)$, και $w \notin (\{ab,ac\}^* \cup \{b^m c^n \mid m,n > 0\})$. Επομένως, αν $w \in L(M)$ τότε $w \in L - (\{ab,ac\}^* \cup \{b^m c^n \mid m,n > 0\})$.

Αντιστρέφοντας τα πιο πάνω επιχειρήματα, λαμβάνουμε ότι αν $w \in L - (\{ab,ac\}^* \cup \{b^m c^n \mid m,n > 0\})$ τότε $w \in L(M)$, και το ζητούμενο έπεται.